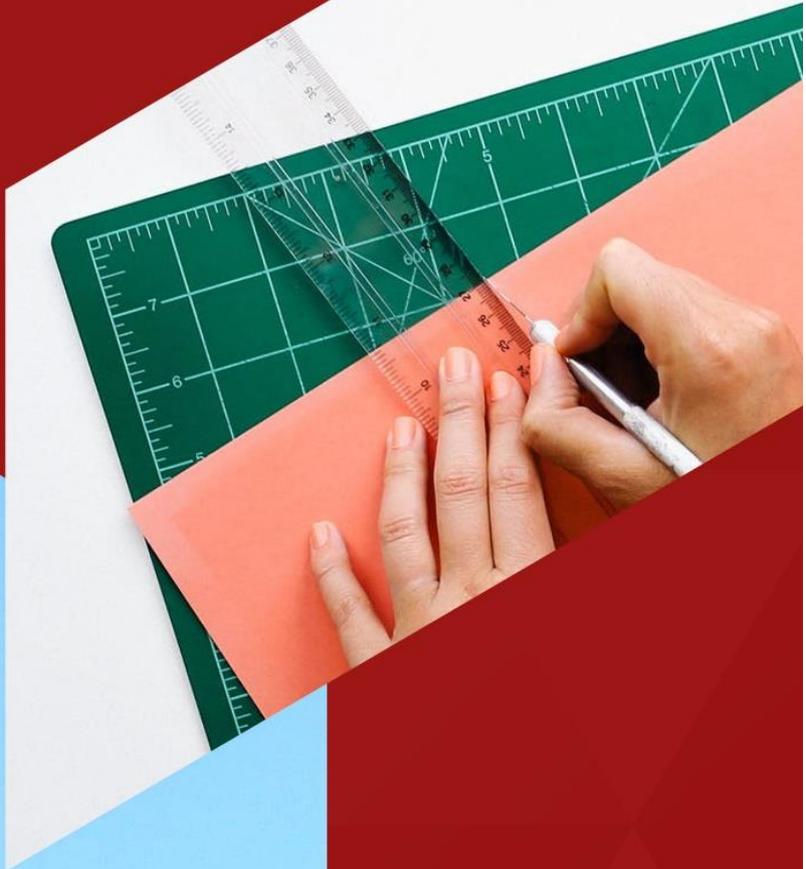
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Matematika Umum

KELAS XI

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

PENYUSUN

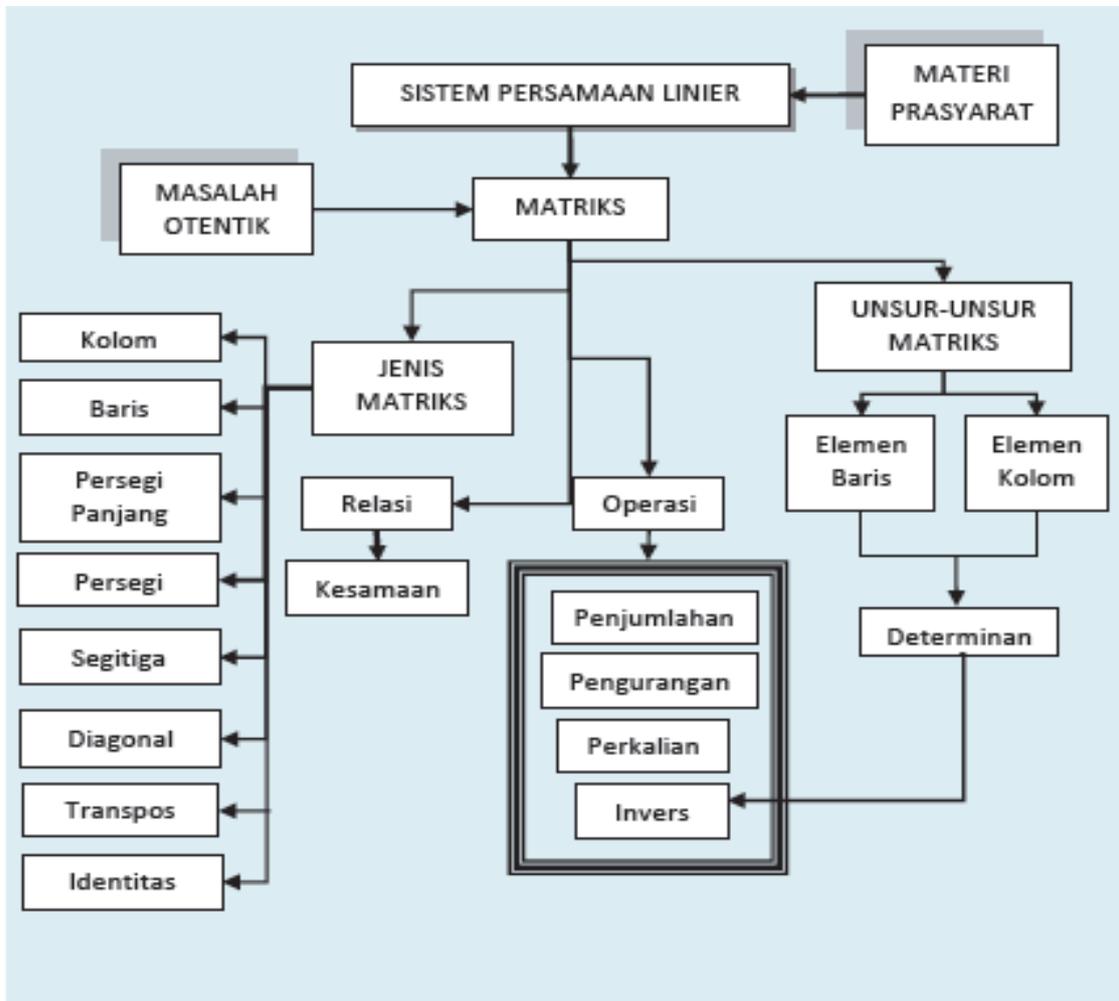
Yusdi Irfan, S.Pd, M.Pd
SMAN 1 Kramatwatu
Kabupaten Serang - Banten

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Determinan Matriks	:	Nilai yang dapat dihitung dari elemen suatu matriks
Invers Matriks	:	Matriks baru yang merupakan sebuah kebalikan dari matriks asal
Metode Sarrus	:	Sebuah cara (metode) yang digunakan untuk menentukan determinan sebuah matriks dengan cara mengalikan, menjumlahkan dan mengurangkan elemen-elemen matriks tertentu
Metode Kofaktor	:	Sebuah cara (metode) yang digunakan untuk menentukan determinan sebuah matriks dengan cara mengekspansi elemen-elemen baris dan kolomnya
Matriks Singular	:	Matriks yang nilai determinannya sama dengan nol dan tidak mempunyai invers
Matriks Non Singular	:	Matriks yang nilai determinannya tidak sama dengan nol dan mempunyai invers
Minor Matriks	:	Determinan matriks bagian dari matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen pada baris tertentu dan kolom tertentu
Adjoint Matriks	:	Transpose dari suatu matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor dari elemen-elemen matriks

PETA KONSEP

SISTEM PERSAMAAN LINIER
MATERI PRASYARAT
MASALAH OTENTIK
MATRIKS
JENIS MATRIKS
UNSUR-UNSUR MATRIKS
Kolom
Baris
Persegi Panjang
Persegi
Segitiga
Diagonal
Transpos
Identitas
Relasi
Kesamaan
Operasi
Penjumlahan
Pengurangan
Perkalian
Invers
Elemen Baris
Elemen Kolom
Determinan

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Umum
Kelas : XI
Alokasi Waktu : 12 JP
Judul Modul : Determinan dan Invers Matriks

B. Kompetensi Dasar

3.4 Menganalisis sifat-sifat determinan dan invers matriks berordo 2x2 dan 3x3
4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks berordo 2x2 dan 3x3

C. Deskripsi Singkat Materi

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang menuntut penyelesaiannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Secara khusus banyak keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip matriks dengan permasalahan masalah nyata yang menyatu/bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep matriks dapat dibangun/ditemukan di dalam penyelesaian nya permasalahan yang kita hadapi.
Untuk itu siswa diharapkan mampu menyelesaiakan permasalahan-permasalahan yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari yang diberikan.
Permasalahan-permasalahan tersebut dibuat dalam bentuk matriks untuk dicari penyelesaiannya dengan menggunakan determinan dan Invers Matriks.

D. PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

Sebelum peserta didik membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, marilah berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupansehari-hari.
2. Bacalah uraian materi dan contoh dengan cermat secara berulang-ulang sehingga benar-benar memahami dan menguasai materi, sebaiknya peserta didik mulai membaca dari peta konsep, pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secaraberurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, peserta didik mengerjakan latihan soal secara mandiri dengan jujur tanpa melihat uraianmateri, jika dalam kasus tertentu mengalami kesulitan dalam menjawab maka lihatlah rambu-rambu jawabannya, jika langkah tersebut masih belum berhasil maka mintalah bantuan guru atau orang lain yang lebih tahu dan memahami.
4. Peserta didik dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika peserta didik memperoleh nilai < 75 maka peserta didik harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Modul siswa tentang matriks ini terdiri atas 3 kompetensi dasar yang meliputi Kompetensi dasar 3.4 dan kompetensi dasar 4.4 dengan pembagian kegiatan pembelajaran sebagai berikut:

1. **Kegiatan Pembelajaran 1** mempelajari tentang metode (cara) menentukan determinan matriks ordo 2x2, dan menggunakannya dalam permasalahan kehidupan sehari-hari.
2. **Kegiatan Pembelajaran 2** mempelajari tentang metode (cara) menentukan determinan matriks ordo 3x3, dan menggunakannya dalam permasalahan kehidupan sehari-hari
3. **Kegiatan Pembelajaran 3** mempelajari tentang cara menetukan invers matriks ordo 2 x 2 dan 3x3, serta pemakaian matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (SPL).

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
DETERMINAN MATRIKS ORDO 2 X 2

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan siswa mampu:
1. Menentukan determinan matriks ordo 2x2, sifat-sifat determinan matriks ordo 2x2,
2. Menggunakan determinan matriks dalam pemecahan masalah kehidupan sehari-hari dengan cermat.

B. Uraian Materi

1. Determinan Matriks berordo 2 x 2

Cermati permasalahan berikut ini:
Siti dan teman-temannya makan di kantin sekolah. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk. Tak lama kemudian, Beni dan teman-temannya datang memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk. Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk pergelas, jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesanannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesanannya

Alternatif Penyelesaian:
Cara I
Petunjuk: Ingat kembali materi sistem persamaan linear yang sudah kamu pelajari. Buatlah sistem persamaan linear dari masalah tersebut, lalu selesaikan dengan matriks.
Misalkan x = harga ayam penyet per porsi
y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya: $3x + 2y = 70.000$
$5x + 3y = 115.000$
Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut.
$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix}$

Ingat kembali bentuk umum Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

Apabila disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ solusi persamaan tersebut adalah :

$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$ dan $y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$, $ad \neq bc$

Cara II
Dalam konsep matriks ad – bc disebut dengan determinan matriks berordo 2 x 2.
Apabila matriks A berordo 2 x 2, yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A didefinisikan sebagai:

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc

Determinan dari suatu matriks persegi A dinotasikan dengan **det A atau |A|,** oleh karena itu nilai x dan y pada persamaan di atas dapat ditulis menjadi :

$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ dan y = $\frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ dengan syarat $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Sehingga apabila kita kembalikan ke permasalahan awal, maka nilai x = harga ayam penyet per porsi dan nilai y = harga es jeruk per gelas dapat ditentukan dengan mempergunakan rumus di atas, yaitu :

$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 70.000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{70.000(3)-115.000(2)}{3(3)-2(5)} = \frac{210.000-230.000}{9-10} = \frac{-20.000}{-1}$ = 20.000 dan

y = $\frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(3)115.000-(5)70.000}{3(3)-2(5)} = \frac{345.000-350.000}{9-10} = \frac{-5.000}{-1}$ = 5.000

jadi harga ayam penyet satu porsinya (x) adalah Rp. 20.000,00 dan harga es jeruk per gelasnya (y) adalah Rp. 5.000,00.

2. Sifat-sifat determinan matriks

Misalkan matriks A dan B berordo m x n dengan m,n ∈ N
1. Jika det A = $|A|$ dan det B = $|B|$, maka det A. det B = det AB atau $|A||B|$= $|AB|$
2. Jika det A = $|A|$ dan det A^t= $|A^t|$, maka det A = det A^t atau $|A|$= $|A^t|$
3. Jika det A = $|A|$ dan det A^{-1}= $|A^{-1}|$, maka $|A^{-1}|$ = $\frac{-1}{|A|}$

Contoh soal

1. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ tentukanlah det A !
2. Diketahuai matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dab matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ tentukanlah :
   a. det A
   b. det B
   c. det A det B
   d. det A^t

Jawaban:
1. Det A = $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ = 2(3) – (-7)(4) = 6 – (-28) = **34**
2. Diketahuai matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
   maka :
   a. det A = $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ = 4(6) – 2(5) = 24 – 10 = **14**
   b. det B = $|B|$ = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 1(4) – 3(2) = 4 – 6 = - 2
   c. det A. det B = $|A||B|$ = 14 (-2) = **- 28**
   atau kita tentukan dulu hasil perkalian AxB
   AxB = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 4(1)+5(3) & 4(2)+5(4) \\ 2(1)+6(3) & 2(2)+6(4) \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} 4+15 & 8+20 \\ 2+18 & 4+24 \end{bmatrix}$
   = $\begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}$

Jadi det AB=$|AB| = \begin{vmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{vmatrix}$= 19(28) – 20(28) = 532 – 560 = **- 28 (sifat ke 1)**

d. A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ maka A^t= $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$
Sehingga det A^t= $|A^t|$= $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$=4(6) – 5(2)= 24 – 10 = **14 (sifat ke 2)**

C. Rangkuman

1. Apabila matriks A berordo 2 x 2, yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A berordo 2 x 2 didefinisikan sebagai: $|A|$ = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc
2. Sifat-sifat determinan matriks
   Misalkan matriks A dan B berordo m x n dengan m,n ∈ N
   a. Jika det A = $|A|$ dan det B = $|B|$, maka det A. det B = det AB atau $|A||B|$= $|AB|$
   b. Jika det A = $|A|$ dan det A^t= $|A^t|$, maka det A = det A^t atau $|A|$= $|A^t|$
   c. Jika det A = $|A|$ dan det A^{-1}= $|A^{-1}|$, maka $|A^{-1}|$ = $\frac{-1}{|A|}$

D. Latihan Soal

I. Latihan Soal Essay

Jawablah soal di bawah ini

1. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$
   a. Tentukan determinan matriks A
   b. Tentukan invers matriks A

2. Ahmad, Budi dan Catur bersama-sama pergi ke toko buku. Ahmad membeli 2 buku dan 1 pensil dengan membayar Rp 8.000,00. Budi membeli 1 buku dan 3 pensil dengan membayar Rp 9000,00. Berapa yang harus dibayar oleh Catur bila ia membeli sebuah buku dan sebuah pensil ? (*Petunjuk*: selesaikan dengan menggunakan determinan)

Kunci Jawaban, Pembahasan dan Pedoman Penskoran

<table>
<tr><th>No.</th><th>Kunci Jawaban dan Pembahasan</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>
Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$
a. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ = ad – bc
= 3(-5) – (-3)(4)
= - 15 + 12
= - 3
b. $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det\ A}}$ Adj A
$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} \frac{-5}{-3} & \frac{3}{-3} \\ \frac{-4}{-3} & \frac{3}{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$
</td><td>2
2
1
2
3</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>
Mengidentifikasi masalah :
<table>
<tr><th></th><th>Buku</th><th>Pensil</th><th>Harga</th></tr>
<tr><td>Ahmad</td><td>3</td><td>2</td><td>15000</td></tr>
<tr><td>Budi</td><td>1</td><td>2</td><td>7000</td></tr>
<tr><td>Catur</td><td>1</td><td>1</td><td>?</td></tr>
</table>
Membuat model matematika sebagai berikut:
Misal buku = x dan pensil = y
Diperoleh sistem persamaan linear : $\begin{cases} 3x + 2y = 15000 \\ x + 2y = 7000 \end{cases}$
Ditanyakan nilai x + y
Dibuat persamaan matriks $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15000 \\ 7000 \end{bmatrix}$ A.X = B
Menggunakan determinan
$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 2.1 = 4$
$\Delta_x = \begin{vmatrix} 15000 & 2 \\ 7000 & 2 \end{vmatrix} = 15000.2 - 2.7000 = 16000$
$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 15000 \\ 1 & 7000 \end{vmatrix} = 3.7000 - 15000.1 = 6000$
Diperoleh $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{16000}{4} = 4000$
$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6000}{4} = 1500$
Jadi bila Catur membeli 1 buku dan 1 pensil, dia harus membayar Rp. 4.000,00 + Rp. 1.500,00 = Rp 5.500,00.
</td><td>2
2
2
1
1
1
1</td></tr>
<tr><td></td><td>Jumlah Skor maksimum</td><td>20</td></tr>
</table>

Untuk mengetahui tingkat penguasaan, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan cukup atau kurang, maka harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Apakah sudah bisa menuliskan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari kedalam bentuk matriks?		
2	Apakah telah mampumemahami konsep tentang determinan matriks berorodo 2x2?		
3	Apakah sudah mampu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan Matriks Dengan menggunakan metode determinan?		
4	Apakah mengerjakan soal-soal bekerja secara mandiri dan jujur tanpa melihat dulu kunci jawaban dan pembahasan atau bertanya kepada orang lain?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
DETERMINAN MATRIKS ORDO 3 X 3

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa mampu:

1. menentukan determinan matriks ordo 3x3 dengan menggunakan Metode Sarrus dan metode kofaktor
2. Menyimpulkan sifat-sifat yang berlaku pada determinan matriks.

B. Uraian Materi

1. Determinan Matriks berordo 3 x 3

Cermati permasalahan berikut:
Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara A, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenispesawat yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A seperti pada tabel berikut

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat masing-masing yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

Penyelesaian:

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:
x = banyaknya pesawat Airbus100
y = banyaknya pesawat Airbus 200
z = banyaknya pesawat Airbus 300

Sistem persamaan yang terbentuk adalah:
$50x + 75y + 40z = 305$
$30x + 45y + 25z = 185$
$32x + 50y + 30z = 206$

Apabila kita tuliskan dalam bentuk matriks, maka persamaan matriks nya adalah:

$$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita harus periksa apakah matriks A adalah matriks tak singular (Non singular).

- **Matriks Singular adalah Matriks yang determinannya sama dengan Nol dan tidak mempunyai matriks Inversnya**
- **Matriks Nonsingular adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan Nol, dan mempunyai matriks Inversnya.**

Pada pembahasan sebelumnya kita sudah membahas tentang cara mencari determinan matriks yang berordo 2 x 2. Sekarang pembahasannya kita lanjutkan tentang bagaimanakah mencari determinan suatu matriks yang berordo 3 x 3?

2. Mencari determinan ordo 3x3 dengan Metode Sarrus

Sebenarnya ada beberapa cara untuk mencari determinan matriks, tetapi untuk pembahasan kita kali ini kita hanya akan membahas tentang menghitung determinan matriks yang berordo 3 x 3 dengan memakai metode **Sarrus**.

Baik sebelum kita lanjut ke materi pokoknya, kita berkenalan dulu dengan struktur matriks berordo 3 x 3. Apa sih yang dimaksud dengan matriks yang berordo 3 x 3?. Matriks 3 x 3 artinya matriks yang jumlah barisnya sebanyak tiga dan jumlah kolomnya juga sebanyak tiga. Secara lengkap matriks 3 x 3 bisa dilihat di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Atau jika ditulis sesuai dengan identitas baris dan kolomnya, maka penulisan matriks A diatas dapat ditulis dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dan untuk mencari determinannya maka matriks di atas kita keluarkan dua kolom pertama yaitu kolom pertama dan kolom kedua kita keluarkan menjadi

$$\begin{matrix} & - & - & - \\ |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \\ & + & + & + \end{matrix}$$

Det A = $|A|$ = (aef + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi)

Setelah dua kolom pertama tadi kita keluarkan, kemudian kita tarik garis diagonal yang menghubungkan tiap tiga elemen seperti gambar. Garis yang rebah dari kiri atas ke kanan bawah kita berikan tanda "+" plus, dan sebaliknya garis diagonal yang rebah dari kanan atas ke kiri bawah kita berikan tanda "-" minus.

Selanjutnya determinan dihitung dengan mengalikan tiap garis yang segaris - maksudnya berada dalam satu garis diagonal – dan memberikan tanda sesuai dengan tanda dibawah garis.

Kelihatannya abstrak sekali kalau kita melihat rumus – rumusnya saja. Baiklah kita langsung saja sekarang kita lihat dan selesaikan soal permasalahan di atas dengan persamaan matriksnya:

$$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} \begin{matrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{matrix}$$

= ((50x45x30)+(75x25x32)+(40x30x50)) – ((40x45x32)+(50x25x50)+(75x30x30))
= (67.500+60.000+60.000) – (57.600+62.500+67.500)
= 187.500 - 187.600
= **- 100**

Untuk menentukan nilai x, y, dan z kita akan menggunakan determinan matriks sebagai cara menyelesaikan permasalahan tersebut

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix} \begin{matrix} 305 & 75 \\ 185 & 45 \\ 206 & 50 \end{matrix}$$

=((305x45x30)+(75x25x206)+(40x185x50))–((40x45x206)+(305x25x50)+(75x185x30))
= (411.750+386.250+370.000) + (370.800+381.250+416.250)
= 1.168.000 - 1.168.300
= **- 300**

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix} \begin{matrix} 50 & 305 \\ 30 & 185 \\ 32 & 206 \end{matrix}$$

=((50x185x30)+(305x25x32)+(40x30x206))-((40x185x32)+(50x25x206)+(305x30x30))
= (277.500+244.000+247.200) – (236.800+257.500+274.500)
= 768.700 - 768.800
= **- 100**

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix} \begin{matrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{matrix}$$

=((50x45x206)+(75x185x32)+(305x30x50))-((305x45x32)+(50x185x50)+(75x30x206))
= (463.500+444.000+457.500) – (439.200+462.500+463.500)
= 1.365.000 - 1.365.200
= **- 200**

$$x = \frac{\Delta X}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3$$

$$y = \frac{\Delta Y}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$$

$$x = \frac{\Delta X}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2$$

Sehingga dari hasil perhitungan dengan menggunakan determinan, diperoleh kesimpulan, banyaknya pesawat Airbus 100 yang disediakan sebanyak 3 unit, banyaknya pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit, dan banyaknya pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

3. **Metode (Cara) Kofaktor**

Setelah kita membahas tentang mencari determinan menggunakan **Metode Sarrus**, berikutnya kita akan membahas tentang mencari determinan dengan menggunakan **Metode Kofaktor** suatu matriks yang berordo 3x3.

Baiklah kita langsung saja ke pokok bahasannya. Yang pertama kita bahas tentang kofaktor suatu matriks.
Kofaktor suatu matriks dirumuskan sebagai −1 pangkat baris ditambah kolom elemen minor dari matriks bersangkutan. Secara matematis dirumuskan sebagai :
K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}

Keterangan :
K_{ij} maksudnya kofaktor dari suatu matriks baris ke – i dan kolom ke – j.
i menyatakan baris
j menyatakan kolom.
M_{ij} merupakan minor baris ke – i kolom ke – j dari suatu matriks.

Contoh :
Tentukanlah kofaktor dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab :
Terlebih dulu kita cari minor dari matriks A tersebut. Disini minor dari matriks A di dapat :

$$M_A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian kita cari kofaktor tiap elemen dari minor tersebut :
Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.
K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}
K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11}
K_{11} = $(-1)^2$. 5
K_{11} = (1) 5 = 5
Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2.
K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12}
K_{12} = $(-1)^3$. M_{12}
K_{12} = (-1) . 3 = 3

Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1
$K_{21} = (-1)^{2+1}. M_{21}$
$K_{21} = (-1)^{3}. 4 = (- 1) 4 = - 4$

Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2
$K_{22} = (-1)^{2+2}. M_{22}$
$K_{22} = (-1)^{4} 2 = 1. 2 = 2$
Jadi, kofaktor dari matriks A adalah $K_A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Sekarang bagaimana dengan Adjoinnya? Kita langsung mencari adjoin matriks A di atas. Tetapi terlebih dulu kita bahas secara singkat apa sih yang dimaksud dengan adjoin?

Adjoin merupakan transfose dari kofaktor matriks A. secara matematis dirumuskan sebagai :

$$Adj = K_A^T$$

Dimana :
K_A^T = Transpose kofaktor dari matriks A
Adj A = adjoin matriks A

Jika kita mau mencari adjoin sebuah matriks, maka terlebih dulu kita cari minornya dulu, setelah itu dari minor ini kita akan mendapatkan matriks kofaktor. Kemudian kofaktor ini kita transfuskan itulah adjoin sebuah matriks, dalam kalimat tadi ada kata transfose, apa yang dimaksud dengan matriks transfose?
Matriks transfose adalah matriks yang urutan baris diubah menjadi kolom dan kolom menjadi baris.
Dari soal di atas , maka kita bisa menentukan adjoinnya adalah sebagai berikut :

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Sekarang bagaimana kalau matriksnya berordo 3 x 3?
Kita perhatikan contoh di bawah ini !

Contoh :
Tentukanlah Kofaktor dan Adjoin dari matriks berikut :
$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :
Terlebih dahulu kita cari minor matriks A, disini didapat bahwa minor matriks A adalah :
M_{11}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3
$M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 2(1) = 6 - 2 = 4$

$M_{12} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 1(2) – 2(0) = 2 – 0 = 2

M_{13}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1(1) – 3(0) = 1 – 0 = 1

M_{21} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 4(2) – 6(1) = 8 – 6 = 2

M_{22} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$M_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 2(2) – 6(0) = 4 – 0 = 4

M_{23} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 2(1) – 4(0) = 2 – 0 = 2

M_{31} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 4(2) – 6(3) = 8 – 18 = - 10

M_{32} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$M_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 2(2) – 6(1) = 4 – 6 = -2

M_{33} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$M_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 2(3) – 4(1) = 6 – 4 = 2

Jadi Minor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

Sehingga kofaktor matriks A adalah:
Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.
K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}
K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11}
K_{11} = $(-1)^2$. 4
K_{11} = (1) 4 = **4**
Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2.

K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12}
K_{12} = (-1)³ . M_{12}
K_{12} = (-1) . 0 = **0**
Kofaktor matriks A baris pertama kolom ketiga, berarti i = 1 dan j = 3.
K_{13} = (-1) M^{1+3}. M_{13}
K_{13} = (-1)⁴ . M_{13}
K_{13} = (1) . 1 = **1**
Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1
$K_{21} = (-1)^{2+1}. M_{21}$
$K_{21} = (-1)^3. 4$ = (- 1) 2 = **- 2**
Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2
$K_{22} = (-1)^{2+2}. M_{22}$
$K_{22} = (-1)^4 2 = 1. 4 =$ **4**
Kofaktor matriks A baris kedua kolom ketiga, berarti i = 2 dan j = 3
$K_{23} = (-1)^{2+3}. M_{23}$
$K_{23} = (-1)^5 2$ = -1. 2 = **- 2**
Kofaktor matriks A baris ketiga kolom pertama, berarti i = 3 dan j = 1
$K_{31} = (-1)^{3+1}. M_{31}$
$K_{31} = (-1)^4 2 = 1. 10 =$ **10**
Kofaktor matriks A baris ketiga kolom kedua, berarti i = 3 dan j = 2
$K_{32} = (-1)^{3+2}. M_{32}$
$K_{22} = (-1)^5$(-2) = -1(-2) = **2**
Kofaktor matriks A baris ketiga kolom ketiga, berarti i = 3 dan j = 3
$K_{33} = (-1)^{3+3}. M_{33}$
$K_{23} = (-1)^6(2) = 1(2) =$ **2**

Jadi Kofaktor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{10} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

Adjoin matriks A dicari dengan mencari transpose dari kofaktor matriks A, sehingga :

$$Adj\ A = A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

C. Rangkuman

1. **Matriks Singular** adalah Matrisk yang determinannya sama dengan Nol dan tidak mempunyai matriks Inversnya.
2. **Matriks Nonsingular** adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan Nol, dan mempunyai matriks Inversnya.
3. **Determinan matriks berordo 3 x 3 dengan metode (cara) Sarrus**

   Apabila matriks A berordo 3 x 3, yaitu A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A berordo 3 x 3 didefinisikan sebagai:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

– – –

\+ \+ \+

det A = $|A|$ = (aef + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi)

4. Metode (cara) Kofaktor

a. Dalam determinan, minor-kofaktor yang dihitung hanya terbatas pada baris atau kolom tertentu saja dan biasa disebut ekspansi baris dan ekspansi kolom.
b. Sedangkan dalam invers, kita harus menghitung sembilan elemen minor dan kofaktor sampai diperoleh matriks baru yaitu matriks minor dan matriks kofaktor
c. Minor adalah determinan submatriks persegi setelah salah satu baris dan kolomnya dihilangkan.
d. Minor dilambangkan dengan "M_{ij}" dimana "i" sebagai baris dan "j" sebagai kolom matriks yang dihilangkan.
e. Baris dan kolom dihilangkan bukan berarti dibuang, akan tetapi baris dan kolom tersebut hanya tidak diikutsertakan dalam submatriks yang baru.
f. Submatriks artinya bagian kecil dari matriks, sedangkan matriks persegi adalah matriks yang mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolom atau sebut saja berordo nxn. Misalnya matriks persegi 3×3 maka submatriksnya berordo 2×2.
g. Jadi, menghitung minor matriks 3×3 adalah menghitung determinan submatriks 2×2
h. Kofaktor suatu matriks dirumuskan sebagai −1 pangkat baris ditambah kolom elemen minor dari matriks bersangkutan. Secara matematis dirumuskan sebagai:

$$K_{ij} = (-1)\ M^{i+j}.\ M_{ij}$$

Keterangan:
i. K_{ij} maksudnya kofaktor dari suatu matriks baris ke – i dan kolom ke – j.
ii. i menyatakan baris
iii. j menyatakan kolom.
iv. M_{ij} merupakan minor baris ke – i kolom ke – j dari suatu matriks.

D. Latihan Soal

Latihan Soal Essay

1. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, tentukan:
   a. Determinan matriks A dengan Metode Sarrus
   b. Adjoint matriks A dengan Metode Kofaktor

Kunci Jawaban, Pembahasan, dan Psedoman Penskoran

Alternatif Penyelesaian

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
1a.	Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ **Determinannya dengan metode Sarrus** $\|A\| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ **=((1)(-4)(-1)+(2)(2)(5)+(0)(3)(6))–((0)(-4)(5)+(1)(2)(6)+(2)(3)(-1))** = (4 + 20 + 0) – (0 + 12 + (-6)) = 24 – 6 = 18	**2** **4** **3**

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
1b.	**Metode Kofaktor** i) Minor $M_{11} = \begin{vmatrix} 9 & -10 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 9 \cdot 7 - (-10) \cdot (-2) = 63 - 20 = 43$ $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 6 \cdot 7 - (-10) \cdot (-3) = 42 - 30 = 12$ $M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot -2 - 9 \cdot (-3) = -12 + 27 = 15$ $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-2) \cdot (-2) = 7 - 4 = 3$ $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-2) \cdot (-3) = 7 - 6 = 1$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot -2 - 1 \cdot (-3) = -2 + 3 = 1$ $M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-10) - (-2) \cdot 9 = -10 + 18 = 8$ $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-10) - (-2) \cdot 6 = -10 + 12 = 2$ $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 1 \cdot 6 = 9 - 6 = 3$	**9**
	ii) Kofaktor $K_{11} = (-1)^2 \cdot 43 = 1 \cdot 43 = 43$ $K_{12} = (-1)^3 \cdot 12 = -1 \cdot 12 = -12$ $K_{13} = (-1)^4 \cdot 15 = 1 \cdot 15 = 15$ $K_{21} = (-1)^3 \cdot 3 = -1 \cdot 3 = -3$ $K_{22} = (-1)^4 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$ $K_{23} = (-1)^5 \cdot 1 = -1 \cdot 1 = -1$ $K_{31} = (-1)^4 \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8$ $K_{32} = (-1)^5 \cdot 43 = -1 \cdot 2 = -2$ $K_{33} = (-1)^6 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$	**9**
	Adj $(A)= \begin{bmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ***Alternatif lain mencari adjoin matriks A:*** $Adj(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ \square & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ \square & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} d & e \\ g & \square \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & \square \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$	**3**
	Jumlah Skor Maksimum	**30**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan cukup atau kurang, maka harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Apakah sudah bisa menuliskan permasalahan nyata dalam bentuk matriks?		
2	Apakah telah mampu memahami konsep dan menetukan determinan matriks berorodo 3x3 dengan metode Sarrus?		
3	Apakah telah mampu memahami dan menentukan konsep metode Kofaktor?		
4	Apakah sudah mampu mampu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang mempunyai 3 variabel dihubungkan dengan Matriks dengan menggunakan metode determinan?		
5	Apakah dalam mengerjakan soal-soal bekerja secara mandiri dan jujur tanpa melihat dulu kunci jawaban dan pembahasan atau bertanya kepada orang lain?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
INVERS MATRIKS

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan siswa mampu:
1. Menentukan invers matriks ordo 2x2 dan ordo 3x3
2. Membuat kesimpulan mengenai cara menyelesaikan operasi matriks dengan menggunakan sifat-siftanya, serta pemanfaatan nilai determinan atau invers matriks dalam pemecahan masalah nyata.

B. Uraian Materi

Invers Matriks

Perhatikan masalah bentuk matriks berordo 2x2 di atas. Selain dengan menggunakan metode determinan, kita bisa menentukan nilai x dan y permasalahan di atas dengan metode Invers Matriks.

Apakah Invers Matriks itu?

Invers matriks A adalah sebuah matriks baru yang merupakan kebalikan dari matriks A dan apabila dikalikan antara matriks A dengan kebalikannya akan menghasilkan matriks Identitas. **Invers matriks A dinotasikan dengan A^{-1}**

- Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 2x2 A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 3x3 A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{Adj A}$$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} \longrightarrow$ A.X = B $\leftrightarrow$ X = A^{-1} **B**

Karena matriks A adalah matriks Nonsingular (matriks yang determinannya sama dengan Nol, dan mempunyai kebalikan/Invers), oleh karena itu, akan kita coba menentukan nilai x dan y dengan menggunakan metode Invers, sebagai berikut:

X = A^{-1} B $\longrightarrow$ $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3(3)-2(5)}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9-10}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{A^{-1}} \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (-3)70.000 + 2(115.00) \\ 5(70.000) + (-3)(115.000) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -210.000 + 230.000 \\ 350.000 + (-345.000) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 20.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$ sehingga nilai x = 20.000 dan y = 5.000

Dengan demikian jawaban untuk permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan dua metode (cara) yaitu dengan metode (cara) determinan dan dengan metode (cara) invers yang menghasilkan nilai atau jawaban yang sama.

Untuk melengkapi contoh selanjutnya, akan kita bahas permasalahan pada matriks yang berordo 3x3.
Perhatikan permasalahan yang sudah dibahas sebelumnya dengan menggunakan metode determinan, sekarang permasalahan tersebut akan kita selesaikan dengan metode invers.

$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$

Terlebih dahulu kita cari minor matriks A, disini didapat bahwa minor matriks A adalah :
M_{11}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{11} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 25 \\ 50 & 30 \end{vmatrix}$ = 45(30) – 25(50) = 1350 – 1.250 = **100**

$M_{12} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$M_{12} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 25 \\ 32 & 30 \end{vmatrix}$ = 30(30) – 25(32) = 900 – 800 = **100**

M_{13}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$M_{13} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{vmatrix}$ = 30(50) – 45(32) = 1.500 – 1.440 = **60**

$M_{21} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{21} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 75 & 40 \\ 50 & 30 \end{vmatrix}$ = 75(30) – 40(50) = 2.250 – 2.000 = **250**

$M_{22} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

M_{22}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 40 \\ 32 & 30 \end{vmatrix}$ = 50(30) – 40(32) = 1.500 – 1.280 = **220**

$M_{23} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

M_{23}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 75 \\ 32 & 50 \end{vmatrix}$ = 50(50) – 75(32) = 2.500 – 2.400 = **100**

$M_{31} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

M_{31}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 75 & 40 \\ 45 & 25 \end{vmatrix}$ = 75(25) – 40(45) = 1.875 – 1.800 = **75**

$M_{32} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

M_{32}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 40 \\ 30 & 25 \end{vmatrix}$ = 50(25) – 40(30) = 1.250 – 1.200 = **50**

$M_{33} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

M_{33}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \end{vmatrix}$ = 50(45) – 75(30) = 2.250 - 2.250 = **0**

Jadi Minor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{60} \\ \mathbf{250} & \mathbf{220} & \mathbf{100} \\ \mathbf{75} & \mathbf{50} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Sehingga kofaktor matriks A adalah:

Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.

K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}

K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11}

K_{11} = $(-1)^2$. 100

K_{11} = (1) 100 = **100**

Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2.

K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12}

K_{12} = $(-1)^3$. M_{12}

K_{12} = (-1) . 100 = **-100**

Kofaktor matriks A baris pertama kolom ketiga, berarti i = 1 dan j = 3.

K_{13} = (-1) M^{1+3}. M_{13}

K_{13} = $(-1)^4$. M_{13}

K_{13} = (1) . 60 = **60**

Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1

K_{21} = $(-1)^{2+1}$. M_{21}

K_{21} = $(-1)^3$. 250 = (- 1) 250 = **- 250**

Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2

K_{22} = $(-1)^{2+2}$. M_{22}

K_{22} = $(-1)^4$ 220 = (1) 220= **220**

Kofaktor matriks A baris kedua kolom ketiga, berarti i = 2 dan j = 3
$K_{23} = (-1)^{2+3}.M_{23}$
K_{23} = $(-1)^{5}$100 = (-1) 100 = **- 100**

Kofaktor matriks A baris ketiga kolom pertama, berarti i = 3 dan j = 1
$K_{31} = (-1)^{3+1}.M_{31}$
K_{31} = $(-1)^{4}$·75 = 1. 75 = **75**

Kofaktor matriks A baris ketiga kolom kedua, berarti i = 3 dan j = 2
$K_{32} = (-1)^{3+2}.M_{32}$
K_{22} = $(-1)^{5}$(50) = -1(50) = **- 50**

Kofaktor matriks A baris ketiga kolom ketiga, berarti i = 3 dan j = 3
$K_{33} = (-1)^{3+3}.M_{33}$
K_{33} = $(-1)^{6}$(0) = 1(0) = **50**

Jadi Kofaktor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{100} & \mathbf{-100} & \mathbf{60} \\ \mathbf{-250} & \mathbf{220} & \mathbf{-100} \\ \mathbf{75} & \mathbf{-50} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Adjoin matriks A dicari dengan mencari transpose dari kofaktor matriks A, sehingga :

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 100 & -250 & 75 \\ -100 & 220 & -50 \\ 60 & -100 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas, diperoleh invers dari matriks A adalah:

$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}$ **Adj A**

Sehingga :

$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}$ **Adj A**= $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-100}}\begin{bmatrix} 100 & -250 & 75 \\ -100 & 220 & -50 \\ 60 & -100 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2{,}5 & -0{,}75 \\ 1 & -2{,}2 & 0{,}5 \\ -0{,}6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Bentuk matriks permaslahan di atas adalah:

$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$

Bentuk tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan AX=B, untuk memperoleh matriks X, yang elemen-elemennya merupakan banyaknya pesawat Airbus100 (x), banyaknya pesawat Airbus 200 (y), dan banyaknya pesawat Airbus 300 (z), kita kalikan dengan matriks $\boldsymbol{A^{-1}}$ke ruas kiri dan ruas kanan persamaan AX=B, sehingga diperoleh:

$\boldsymbol{A^{-1}}$AX=$\boldsymbol{A^{-1}}$B
X = $\boldsymbol{A^{-1}}\mathbf{B}$

X = $\begin{bmatrix} -1 & 2{,}5 & -0{,}75 \\ 1 & -2{,}2 & 0{,}5 \\ -0{,}6 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} (-1)(305) + (2{,}5)(185) + (-0{,}75)(206) \\ (1)(305) + (-2{,}2)(185) + (0{,}5)(206) \\ (-0{,}6)(305) + (1)(185) + (0)(206) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -305 + 462{,}5 + (-154{,}5) \\ 305 + (-407) + 103 \\ (-183) + 185 + 0 \end{bmatrix}$

X = $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Hasil yang diperoleh dengan menerapkan metode (cara) Invers dan metode (cara) determinan, diperoleh hasil yang sama, yaitu banyaknya pesawat Airbus 100 yang

disediakan sebanyak 3 unit, banyaknya pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit, dan banyaknya pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

Sifat-sifat Invers matriks

1. **Misalkan matriks A berordo n x n dengan n ∈ N, dan determinan A tidak sama dengan nol, jika A^{-1} adalah invers dari A, maka $(A^{-1})^{-1}$ = A**
2. **Misalkan matriks A dan B berordo n x n dengan n ∈ N, dan determinan A dan B tidak sama dengan nol, jika A^{-1} dan B^{-1}adalah invers dari matriks A dan B, maka $(AB)^{-1}$ = $B^{-1}A^{-1}$**

C. Rangkuman

1. Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 2x2 A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 3x3 A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\ \textbf{Adj A}$$

3. Mencari matriks X dalam bentuk persamaan Matriks:
   - A.X = B ↔ X = $\boldsymbol{A^{-1}}$ **B**
   - X.A = B ↔ X = **B** $\boldsymbol{A^{-1}}$

D. Latihan Soal

1. Diketahui matriks berordo 2x2 A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Carilah invers matirksnya (A^{-1})
2. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, tentukan invers matriksnya (A^{-1})

Kunci Jawaban, Pembahasan dan Pedoman Penskoran

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
1.	Matriks koefisien A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, Determinan matriks A adalah det A = $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 3(2) – 2(1) = 6 – 2 = 4 Invers matriks koefisien A $A^{-1} = \frac{1}{\|A\|} Adj.A$ $= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$	**3** **2** **2**
2.	Diketahui A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ det A = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \\ -3 & -2 \end{matrix}$ = **((1)(9)(7)+(1)(-10)(-3)+(-2)(6)(-2))-((-2)(9)(-3)+(1)(-10)(-2)+(1)(6)(7))** = (63+30+24) – (54+20+42) = 117 – 116 = 1 Minor Matriks M_{11}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3 $M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -10 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$ = 9(7) – (-10)(-2) = 63 – 20 = 43 M_{12} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3 $M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ = 6(7) – (-10)(-3) = 42 – 30 = **12** M_{13}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3 $M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$ = 6(-2) – 9(-3) = - 12 – (-27) = **15** M_{21} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3	**3** **4** **9**

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
	$M_{21}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$ = 1(7) – (-2)(-2) = 7 – 4 = **3** M_{22} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3 $M_{22}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ = 1(7) – (-2)(-3) = 7 – 6 = **1** M_{23} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3 $M_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$ = 1(-2) – 1(-3) = (- 2) – (-3) = **1** M_{31} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3 $M_{31}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -10 \end{vmatrix}$ = 1(-10) – (-2)(9) = - 10 – (-18) = **8** M_{32} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3 $M_{32}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$ = 1(-10) – (-2)(6) = - 10 – (-12) = **2** M_{33} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3 $M_{33}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ = 1(9) – 1(6) = 9 - 6 = **3** Jadi Minor Matriks A = $\begin{pmatrix} \mathbf{43} & \mathbf{12} & \mathbf{15} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ Sehingga kofaktor matriks A adalah: Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.	**1** **9**

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
	K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij} K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11} K_{11} = (-1)^2. 43 K_{11} = (1) 43 = **43** Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2. K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12} K_{12} = (-1)^3 . M_{12} K_{12} = (-1) . 2 = **-12** Kofaktor matriks A baris pertama kolom ketiga, berarti i = 1 dan j = 3. K_{13} = (-1) M^{1+3}. M_{13} K_{13} = (-1)^4 . M_{13} K_{13} = (1) . 15 = **15** Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1 K_{21} = $(-1)^{2+1}$. M_{21} K_{21} = $(-1)^3$. 3 = (- 1) 3 = **- 3** Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2 K_{22} = $(-1)^{2+2}$. M_{22} K_{22} = $(-1)^4$ 1 = (1)(1)= **1** Kofaktor matriks A baris kedua kolom ketiga, berarti i = 2 dan j = 3 K_{23} = $(-1)^{2+3}$. M_{23} K_{23} = $(-1)^5$1 = (-1) (1) = **- 1** Kofaktor matriks A baris ketiga kolom pertama, berarti i = 3 dan j = 1 K_{31} = $(-1)^{3+1}$. M_{31} K_{31} = $(-1)^{4}$. (8) = 1. (8) = **8** Kofaktor matriks A baris ketiga kolom kedua, berarti i = 3 dan j = 2 K_{32} = $(-1)^{3+2}$. M_{32} K_{22} = $(-1)^5$(2) = -1(2) = **- 2** Kofaktor matriks A baris ketiga kolom ketiga, berarti i = 3 dan j = 3 K_{33} = $(-1)^{3+3}$. M_{33} K_{33} = $(-1)^6$(3) = 1(3) = **3** Jadi Kofaktor Matriks A = $\begin{pmatrix} \mathbf{43} & \mathbf{-12} & \mathbf{15} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ Adjoin matriks A dicari dengan mencari transpose dari kofaktor matriks A, sehingga : $Adj\ A = \begin{pmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det\ A}}$ **Adj A**	 **1** **2** **2** **2**

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
	$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}\begin{pmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	
	Jumlah Skor Maksimum	**40**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

E. Penilaian Diri

F. Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Apakah sudah bisa menuliskan permasalahan nyata dalam bentuk matriks?		
2	Apakah telah mampu memahami konsep dan mampu menentukan invers matriks berordo 2x2?		
3	Apakah telah mampu memahami konsep dan mampu menentukan invers matriks berordo 3x3?		
4	Apakah sudah mampu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan Matriks Dengan menggunakan Invers Matriks?		
5	Apakah dalam mengerjakan soal-soal bekerja secara mandiri dan jujur tanpa melihat dulu kunci jawaban dan pembahasan atau bertanya kepada orang lain?		

EVALUASI

Pilihlah salah satu jawaban yang benar!

1. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$. Nilai determinan dari matriks (AB – C) adalah ...
   A. – 7
   B. – 5
   C. 2
   D. 3
   E. 12
2. Determinan dari matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah…
   A. 13
   B. 14
   C. 15
   D. 16
   E. 17
3. Matriks X yang memenuhi persamaan $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$ adalah…
   A. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$
   F.
4. Himpunan penyelesaian dari:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ x + 4y = -5 \end{cases}$$
   Adalah…
   A. x = 2 dan y = -2
   B. x = - 2 dan y = 2
   C. x = -2 dan y = 3
   D. x = 3 dan y = -2
   E. x = -1 dan y = 2
5. Diketahui matriks P = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan Q = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Jika P^{-1} adalah invers matriks P dan Q^{-1} adalah invers matriks Q, maka determinan matriks Q^{-1} P^{-1} adalah ...
   A. 209
   B. 10
   C. 1
   D. – 1
   E. - 209
6. Invers dari matriks P = $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ adalah…
   A. $\begin{bmatrix} \frac{11}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} \frac{11}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} -\frac{11}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} \frac{11}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$
7. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Nilai x – y = ...
   A. $\frac{5}{2}$
   B. $\frac{22}{2}$
   C. $\frac{15}{2}$
   D. $\frac{23}{2}$
   E. $\frac{19}{2}$
   F.

8. Bu Ani seorang pengusaha makanan kecil yang menyetorkan dagangannya ke tiga kantin sekolah. Tabel banyaknya makan yang disetorkan setiap harinya sebagai berikut :

	Kacang	Keripik	Permen
Kantin A	10	10	5
Kantin B	20	15	8
Kantin C	15	20	10

Harga sebungkus kacang adalah Rp. 2.000,00, keripik adalah Rp. 3.000,00, dan permen adalah Rp. 1.000,00. Pemasukan total harian yang diterima ibu Ani adalah…
A. Rp. 235.000,00.
B. Rp. 248.000,00.
C. Rp. 254.000,00.
D. Rp. 256.000,00.
E. Rp. 325.000,00.

9. Diketahui matriks A = = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{bmatrix}$Jika determinan matriks A = -8, maka determinan matriks B adalah…
A. 96
B. -96
C. -64
D. 48
E. -48

10. Diketahui $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 35$, maka nilai x adalah…
A. – 2
B. – 1
C. 0
D. 2
E. 3

11. Diberikan matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B + C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Jika matriks A berordo 2 x 2 sehingga AB + AC = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, maka determinan matriks AB adalah ….
A. 4
B. 2
C. 1
D. -1
E. -2

12. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Jika A^t adalah transpose dari matriks A dan AX = B + A^t. Maka determinan matriks A adalah ….
A. -46
B. -33
C. 27
D. 22
E. 46

13. Jika A adalah matriks berordo 2x2 yang memenuhi persamaan matriks $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $A\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Maka hasil kali $A\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ adalah ….
A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
E. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

14. Jika matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $2P^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ -z & z \end{pmatrix}$. Jika P^{-1} menyatakan invers dari matriks P, maka nilai x + y = ….
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

15. Diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Jika P^{-1} dan Q^{-1} masing-masing adalah invers dari matriks P dan Q, maka determinan dari $P^{-1}Q^{-1}$ adalah ….
A. 223
B. 1
C. -1
D. -10
E. -223

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. D
2. A
3. A
4. D
5. C
6. B
7. D
8. B
9. A
10. E
11. B
12. B
13. C
14. C
15. B

DAFTAR PUSTAKA

https://www.wardayacollege.com/matematika/matriks/operasi-pada-matriks/operasi-matriks/, 2020

https://tanya-tanya.com/rangkuman-contoh-soal-pembahasan-matriks/, 2020

Kemendikbud RI.______. *Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103*

Kemendikbud RI.______. *Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103 Edisi Revisi 2015*

Kemendikbud RI.______.*Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103 Edisi Revisi 2016*